

## INDICES and SURDS

1) Simplify the following:

a)  $(a^4)^5$

b)  $(x^2)^7$

c)  $(a^3b^2)^3$

d)  $(p^3q^5)^4$

e)  $x^{10} \div x^6$

f)  $a^7 \div a^5$

g)  $p^{12} \div p^4$

h)  $15p^6 \div 5p^4$

i)  $21a^4 \div 7a^4$

j)  $10a^{15} \div (a^2)^3$

k)  $4(a^3)^5 \div 2a^8$

l)  $16(a^2)^5 \div 2a^8$

m)  $8(x^2)^5 \div 4x^3$

n)  $20(x^3)^6 \div 5(x^2)^7$

o)  $15a^3b^6 \div 3ab^4$

p)  $18a^3b^2c^4 \div 6abc$

q)  $20(a^3b)^3 \div 5ab^3$

r)  $27a^2bc^2 \times 2(ab)^2$

s)  $6a^2bc^3 \times 2a^2bc \div 3a^2b^2c$

t)  $9xy^4 \times 2x^5yz^3 \div 6(x^2yz)^2$ .

2) Evaluate the following without a calculator. **Show your working in full.**

a)  $64^{\frac{1}{2}}$

b)  $4^{-\frac{1}{2}}$

c)  $2^{-3}$

d)  $3^{-2}$

e)  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

f)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

g)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

h)  $27^{\frac{1}{3}}$

i)  $27^{\frac{2}{3}}$

j)  $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

k)  $(-2)^2$

l)  $(-2)^3$

m)  $(6\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$

n)  $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

o)  $100^{\frac{3}{2}}$

p)  $(10^{-6})^{\frac{1}{3}}$

q)  $4^{-\frac{3}{2}}$

r)  $1^6$ .

3) Express the following in the form  $a^n$ , stating the value of  $n$ .

a)  $\sqrt{a} \times a$

b)  $\frac{1}{a}$

c)  $\frac{1}{\sqrt{a}}$

d)  $(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}$

e)  $\frac{1}{(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}}$

f)  $\sqrt{a^{\frac{8}{3}}}$

g)  $\frac{1}{\sqrt{a^{\frac{16}{5}}}}$

h)  $a^2 \div \sqrt{a}$

i)  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

j)  $\frac{a}{\sqrt[4]{a}}$ .

4) Express the following as algebraic fractions in their simplest form.

E.g.  $(25a^8)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(25a^8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5a^4}$ .

a)  $(9a^4)^{-\frac{1}{2}}$

b)  $(16a^6)^{-\frac{1}{2}}$

c)  $(8a^3)^{-\frac{1}{3}}$

d)  $\left(\frac{2}{a^3}\right)^{-1}$ .

5) Simplify  $\frac{(x\sqrt{x})^3}{2x^4}$ .

6) Solve the following equations for  $x$ . (Give positive solutions only.)

a)  $x^{\frac{1}{2}} = 6$ ,      b)  $x^{\frac{1}{3}} = 4$ ,      c)  $x^{\frac{2}{3}} = 9$ ,      d)  $x^{\frac{3}{2}} = 8$ ,      e)  $x^{-\frac{1}{2}} = 4$ ,      f)  $x^{-\frac{2}{3}} = 4$ .

7) i) Simplify the following surds.

a)  $\sqrt{12}$ ,      b)  $\sqrt{48}$ ,      c)  $\sqrt{18}$ ,      d)  $\sqrt{32}$ ,      e)  $\sqrt{28}$ ,  
 f)  $\sqrt{90}$ ,      g)  $\sqrt{325}$ ,      h)  $\sqrt{507}$ ,      i)  $\sqrt{60\,000}$ ,      j)  $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ ,  
 k)  $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{30}$ ,      l)  $(\sqrt{5})^2$ ,      m)  $(\sqrt{2})^3$ .

ii) Simplify the following surds.

a)  $\sqrt{27}$ ,      b)  $\sqrt{75}$ ,      c)  $\sqrt{50}$ ,      d)  $\sqrt{72}$ ,      e)  $\sqrt{63}$ ,  
 f)  $\sqrt{160}$ ,      g)  $\sqrt{208}$ ,      h)  $\sqrt{432}$ ,      i)  $\sqrt{240\,000}$ ,      j)  $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ ,  
 k)  $\sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{30}$ ,      l)  $(\sqrt{7})^2$ ,      m)  $(\sqrt{2})^5$ .

8) i) Express each of the following in the form  $a\sqrt{b} + c$ , where  $b$  is as small as possible.

a)  $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{3}$ ,      b)  $\sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{32}$ ,      c)  $\sqrt{45} + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{20}$ ,  
 d)  $2\sqrt{50} - \sqrt{72} + 7\sqrt{8}$ ,      e)  $\sqrt{2} \times (5 - \sqrt{2})$ ,      f)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ ,  
 g)  $\sqrt{3}(2\sqrt{3} - \sqrt{12})$ ,      h)  $(3\sqrt{2} + \sqrt{50})^2$ ,      i)  $(\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18})^2$ .

ii) Express each of the following in the form  $a\sqrt{b} + c$ , where  $b$  is as small as possible.

a)  $5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ ,      b)  $\sqrt{2} + \sqrt{50} + \sqrt{8}$ ,      c)  $\sqrt{20} + 5\sqrt{5} - \sqrt{125}$ ,  
 d)  $3\sqrt{50} - \sqrt{98} + 2\sqrt{8}$ ,      e)  $\sqrt{2} \times (3 - \sqrt{2})$ ,      f)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ ,  
 g)  $\sqrt{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{18})$ ,      h)  $(\sqrt{2} + \sqrt{32})^2$ ,      i)  $(\sqrt{2} + \sqrt{50} + \sqrt{18})^2$ .

9) Simplify the following fractions by removing the surd from the denominator.

a)  $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ,      b)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,      c)  $\frac{7}{\sqrt{7}}$ ,      d)  $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ,      e)  $\frac{20}{\sqrt{100}}$ ,  
 f)  $\frac{14}{\sqrt{7}}$ ,      g)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,      h)  $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{108}}$ ,      i)  $\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ ,      j)  $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ ,  
 k)  $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ ,      l)  $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ ,      m)  $\sqrt{1\frac{19}{81}}$ .

{Hint: convert mixed fractions to top-heavy fractions.}

10) i) By multiplying the fraction  $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$  by  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$ , show that  $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$ .

ii) Simplify: a)  $\frac{1}{\sqrt{3} + 1}$ ,      b)  $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ .

ANSWERS.

1) a)  $a^{20}$ , b)  $x^{14}$ , c)  $a^9b^6$ , d)  $p^{12}q^{20}$ , e)  $x^4$ , f)  $a^2$ , g)  $p^8$ , h)  $3p^2$ , i) 3, j)  $10a^9$ , k)  $2a^7$ ,  
l)  $8a^2$ , m)  $2x^7$ , n)  $4x^4$ , o)  $5a^2b^2$ , p)  $3a^2bc^3$ , q)  $4a^8$ , r)  $54a^4b^3c^2$ , s)  $4a^2c^3$ , t)  $3x^2y^3z$ .

2) a) 8, b)  $\frac{1}{2}$ , c)  $\frac{1}{8}$ , d)  $\frac{1}{9}$ , e)  $\frac{1}{4}$ , f) 4, g) 9, h) 3, i) 9, j)  $\frac{3}{2}$ , k) 4, l) -8, m)  $\frac{5}{2}$ , n)  $\frac{2}{3}$ , o) 1000,  
p)  $\frac{1}{100}$ , q)  $\frac{1}{8}$ , r) 1.

3) a)  $a^{\frac{3}{2}}$ , b)  $a^{-1}$ , c)  $a^{-\frac{1}{2}}$ , d)  $a^{\frac{2}{3}}$ , e)  $a^{-\frac{2}{3}}$ , f)  $a^{\frac{1}{3}}$ , g)  $a^{-\frac{8}{5}}$ , h)  $a^{\frac{3}{2}}$ , i)  $a^{-\frac{2}{3}}$ , j)  $a^{\frac{3}{4}}$ .

4) a)  $1/(3a^2)$ , b)  $1/(4a^3)$ , c)  $1/(2a)$ , d)  $a^3/2$ .

5)  $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ .

6) a)  $x = 36$ , b)  $x = 64$ , c)  $x = 27$ , d)  $x = 4$ , e)  $x = \frac{1}{16}$ , f)  $x = \frac{1}{8}$ .

7) i) a)  $2\sqrt{3}$ , b)  $4\sqrt{3}$ , c)  $3\sqrt{2}$ , d)  $4\sqrt{2}$ , e)  $2\sqrt{7}$ , f)  $3\sqrt{10}$ , g)  $5\sqrt{13}$ , h)  $13\sqrt{3}$ , i)  $100\sqrt{6}$ ,  
j) 4, k)  $15\sqrt{2}$ , l) 5, m)  $2\sqrt{2}$ .

ii) a)  $3\sqrt{3}$ , b)  $5\sqrt{3}$ , c)  $5\sqrt{2}$ , d)  $6\sqrt{2}$ , e)  $3\sqrt{7}$ , f)  $4\sqrt{10}$ , g)  $4\sqrt{13}$ , h)  $12\sqrt{3}$ , i)  $200\sqrt{6}$ ,  
j) 6, k) 30, l) 7, m)  $4\sqrt{2}$ .

8) i) a)  $8\sqrt{3}$ , b)  $9\sqrt{2}$ , c)  $\sqrt{5}$ , d)  $18\sqrt{2}$ , e)  $5\sqrt{2} - 2$ , f)  $5 + 2\sqrt{6}$ , g) 0, h) 128, i) 72.

ii) a)  $6\sqrt{3}$ , b)  $9\sqrt{2}$ , c)  $2\sqrt{5}$ , d)  $12\sqrt{2}$ , e)  $3\sqrt{2} - 2$ , f)  $5 - 2\sqrt{6}$ , g) -2, h) 50, i) 162.

9) a)  $5\sqrt{2}/2$ , b)  $\sqrt{3}/3$ , c)  $\sqrt{7}$ , d)  $4\sqrt{5}$ , e) 2, f)  $2\sqrt{7}$ , g)  $\sqrt{2}/2$ , h)  $5/6$ , i) 1, j)  $3/2$ , k)  $4/3$ , l)  $5/3$ ,  
m)  $10/9$ .

10) ii) a)  $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ , b)  $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ .