

INTEGRATION BY SUBSTITUTION

Indefinite integration.

1) $\int \frac{x}{4 - x^2} dx.$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$

3) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$

4) $\int x^2 \sin x^3 dx.$

5) $\int x^2 e^{x^3} dx.$

6) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$

7) $\int \sin x \cos^4 x dx.$

8) $\int x^2 \sqrt{2 + x^3} dx.$

9) $\int x \sqrt{2 + x} dx.$

10) $\int \frac{2x}{(1 + x^2)^3} dx.$

11) $\int \cot x dx.$

12) $\int x(x + 2)^4 dx.$

13) $\int \sin x \sqrt{\cos x} dx.$

14) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ Put $x = \sin u.$

15) $\int \frac{1}{1 + x^2} dx.$ Put $x = \tan u.$

16) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$ Put $x = 2 \sin u.$

17) $\int \frac{1}{9 + x^2} dx.$ Put $x = 3 \tan u.$

Definite integration.

1) $\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx.$

2) $\int_0^1 \frac{x^2}{(1 + x^3)^2} dx.$

3) $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x - 1}} dx.$

4) $\int_2^3 x \sqrt{x - 2} dx.$

5) $\int_0^1 x(x - 1)^4 dx.$

6) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} dx.$

7) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

8) $\int_{-1}^0 x(x^2 - 1)^4 dx.$

9) $\int_0^1 x^2(1 - x)^{\frac{1}{2}} dx.$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx.$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 + \sin x} dx.$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \sin x dx.$

13) $\int_0^2 2x \sqrt{4 - x} dx.$

14) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ Put $x = \sin u.$

15) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx.$ Put $x = \cos u.$

16) $\int_{\frac{3}{2}}^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$ Put $x = 3 \sin u.$

ANSWERS.

Indefinite integration.

1) $-\frac{1}{2} \ln(4 - x^2) + K.$

2) $-\sqrt{4 - x^2} + K.$

3) $\ln(1 + e^x) + K.$

4) $-\frac{1}{3} \cos x^3 + K.$

5) $\frac{1}{3} e^{x^3} + K.$

6) $\sqrt{x^2 - 1} + K.$

7) $-\frac{1}{5} \cos^5 x + K.$

8) $\frac{2}{9} (2 + x^3)^{\frac{3}{2}} + K.$

9) $\frac{2}{5} (2 + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (2 + x)^{\frac{3}{2}} + K.$

10) $-\frac{1}{2(1 + x^2)^2} + K.$

11) $\ln(\sin x) + K.$

12) $\frac{(x + 2)^6}{6} - \frac{2(x + 2)^5}{5} + K.$

13) $-\frac{2}{3} (\cos x)^{\frac{3}{2}} + K.$

14) $\sin^{-1} x + K.$

15) $\tan^{-1} x + K.$

16) $\sin^{-1} \left(\frac{x}{2}\right) + K.$

17) $\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3}\right) + K.$

Definite integration.

1) $\frac{1}{2} \ln 2.$

2) $\frac{1}{6}.$

3) $\frac{20}{3}.$

4) $\frac{26}{15}.$

5) $\frac{1}{30}.$

6) $\sqrt{3} - \frac{2}{3}.$

7) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

8) $-\frac{1}{10}.$

9) $\frac{16}{105}.$

10) $e - 1.$

11) $\ln\left(\frac{5}{4}\right).$

12) $\frac{\sqrt{3}}{4}.$

13) $\frac{256}{15} - \frac{112}{15} \sqrt{2}$ (6.507205401).

14) $\frac{\pi}{3}.$

15) $\sqrt{3}.$

16) $\frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}$ (2.763831822).